b) Per il secondo teorema dei triangoli rettangoli,

$$\overline{AC} = \overline{AB}\ \mathrm{tg}\,\beta \rightarrow 40 = 30\mathrm{tg}\,\beta \rightarrow \mathrm{tg}\,\beta = \frac{4}{3}$$

$$\beta = \mathrm{arctg}\frac{4}{3},$$

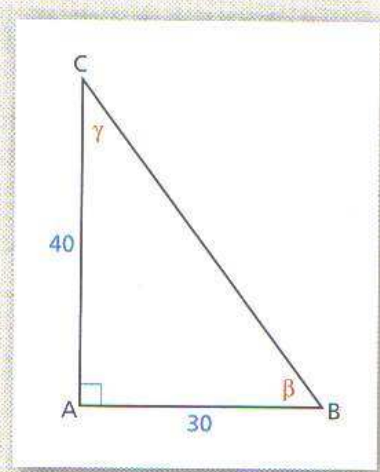
da cui:

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\frac{4}{3}.$$

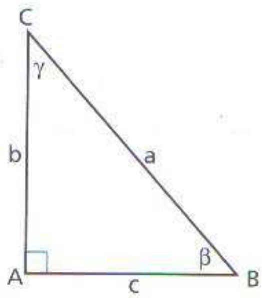
Con il teorema di Pitagora calcoliamo $\overline{BC}$:

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50.$$

L'ipotenusa BC ha lunghezza 50 cm.



Risolvi il triangolo ABC, rettangolo in A, noti gli elementi indicati.



4 $b = 15$; $\gamma = 30°$. $[a = 10\sqrt{3}; c = 5\sqrt{3}; \beta = 60°]$

5 $a = 24$; $\beta = 60°$. $[b = 12\sqrt{3}; c = 12; \gamma = 30°]$

6 $b = 8$; $c = 8\sqrt{3}$. $[a = 16; \beta = 30°; \gamma = 60°]$

7 $a = 48$; $b = 24$. $[c = 24\sqrt{3}; \beta = 30°; \gamma = 60°]$

8 $c = 10$; $\gamma = 60°$. $\left[a = \frac{20}{3}\sqrt{3}; b = \frac{10}{3}\sqrt{3}; \beta = 30°\right]$

9 $b = 22$; $\gamma = 45°$. $[a = 22\sqrt{2}; c = 22; \beta = 45°]$

10 $b = 46$; $\beta = 30°$. $[a = 92; c = 46\sqrt{3}; \gamma = 60°]$

11 $a = 84$; $c = 42\sqrt{3}$. $[b = 42; \beta = 30°; \gamma = 60°]$

12 $a = 28$; $\gamma = 45°$. $[b = 14\sqrt{2}; c = 14\sqrt{2}; \beta = 45°]$

13 $a = 36$; $\beta = 18°$. $[b \simeq 11{,}12; c \simeq 34{,}24; \gamma = 72°]$

14 $c = 5$; $b = 12$. $\left[a = 13; \beta = \mathrm{arcsen}\frac{12}{13}; \gamma = \mathrm{arcsen}\frac{5}{13}\right]$

15 $c = 5$; $a = 5\sqrt{2}$. $[b = 5; \beta = \gamma = 45°]$

16 $c = 15$; $\beta = \mathrm{arctg}\frac{3}{5}$. $\left[b = 9; a \simeq 17{,}49; \gamma = \mathrm{arctg}\frac{5}{3}\right]$

17 $a = 5$; $\beta = 10°$. $[b \simeq 0{,}87; c \simeq 4{,}92; \gamma = 80°]$

18 $b = 16$; $a = 34$. $\left[c = 30; \beta = \mathrm{arcsen}\frac{8}{17}; \gamma = \mathrm{arcsen}\frac{15}{17}\right]$

19 $b = 12$; $\beta = \frac{\pi}{3}$. $\left[a = 8\sqrt{3}; c = 4\sqrt{3}; \gamma = \frac{\pi}{6}\right]$

20 $c = 3{,}5$; $b = 12$. $[a = 12{,}5; \beta = \arccos 0{,}28; \gamma = \mathrm{arcsen}\ 0{,}28]$

21 $a = 40$; $\gamma = 60°$. $[b = 20; c = 20\sqrt{3}; \beta = 30°]$

22 $b = 14$; $\gamma = \arccos\frac{2}{3}$. $\left[a = 21; c \simeq 15{,}65; \beta = \mathrm{arcsen}\frac{2}{3}\right]$

23 $a = 10$; $\gamma = 20°$. $[\beta = 70°; b \simeq 9{,}4; c \simeq 3{,}42]$

24 $c = 80$; $b = 150$. $\left[a = 170; \beta = \text{arcsen}\frac{15}{17}; \gamma = \text{arcsen}\frac{8}{17}\right]$

25 $c = 40$; $a = 41$. $\left[b = 9; \beta = \text{arcsen}\frac{9}{41}; \gamma = \text{arcsen}\frac{40}{41}\right]$

26 $a = 8$; $\beta = 65°$. $[\gamma = 25°; b \simeq 7{,}25; c \simeq 3{,}38]$

27 $c = 36$; $\gamma = \frac{\pi}{4}$. $\left[\beta = \frac{\pi}{4}; b = 36; a = 36\sqrt{2}\right]$

28 $b = 8$; $c = 15$. $\left[a = 17; \beta = \text{arcsen}\frac{8}{17}; \gamma = \text{arcsen}\frac{15}{17}\right]$

29 $a = 9$; $\beta = \text{arcsen}\frac{3}{5}$. $\left[\gamma = \text{arccos}\frac{3}{5}; b = \frac{27}{5}; c = \frac{36}{5}\right]$

30 $a = 40$; $\gamma = 85°$. $[\beta = 5°; b \simeq 3{,}5; c \simeq 39{,}8]$

31 $c = 32$; $\gamma = \frac{\pi}{6}$. $\left[\beta = \frac{\pi}{3}; b = 32\sqrt{3}; a = 64\right]$

32 $b = 5\sqrt{3}$; $c = 5$. $\left[a = 10; \beta = \frac{\pi}{3}; \gamma = \frac{\pi}{6}\right]$

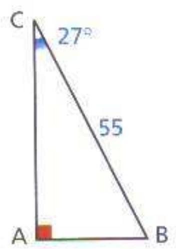
33 $b = 30$; $\gamma = \text{arccos}\frac{15}{17}$. $\left[a = 34; c = 16; \beta = \text{arcsen}\frac{15}{17}\right]$

34 $c = 75$; $\beta = \text{arctg}\frac{8}{15}$. $\left[b = 40; a = 85; \gamma = \text{arcsen}\frac{15}{17}\right]$

35 $b = 56$; $\beta = \text{arcsen}\frac{21}{29}$. $\left[a = \frac{232}{3}; c = \frac{160}{3}; \gamma = \text{arcsen}\frac{20}{29}\right]$

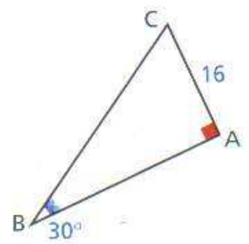
Risolvi i seguenti triangoli rettangoli, noti gli elementi indicati in figura.

36



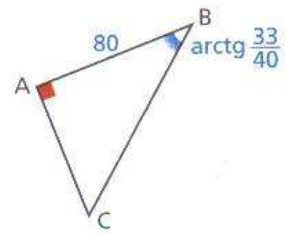
$[c \simeq 24{,}97; b \simeq 49{,}01; \beta = 63°]$

37



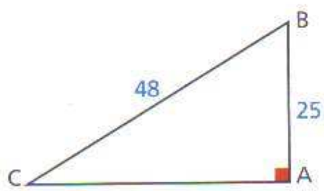
$[a = 32; c \simeq 27{,}71; \gamma = 60°]$

38



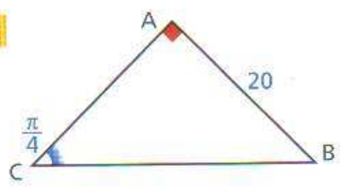
$\left[b = 66; a \simeq 103{,}71; \gamma = \text{arctg}\frac{40}{33}\right]$

39



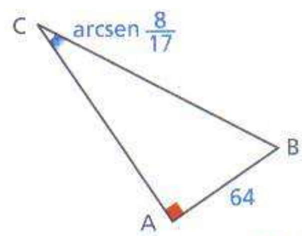
$\left[b \simeq 40{,}98; \beta \simeq \text{arcsen } 0{,}85; \gamma = \text{arcsen}\frac{25}{48}\right]$

40



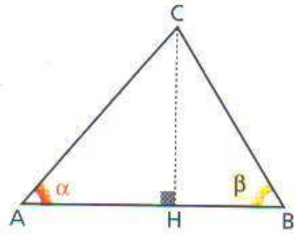
$\left[\beta = \frac{\pi}{4}; b = 20; a = 20\sqrt{2}\right]$

41



$\left[a = 136; b = 120; \beta = \text{arcsen}\frac{15}{17}\right]$

Nei seguenti esercizi, dato un triangolo come quello della figura e noti gli elementi indicati, determina i lati e gli angoli incogniti.



52 $\alpha = 30°, \beta = 45°, \overline{CH} = 12.$ $[24; 12\sqrt{2}; 12(\sqrt{3}+1); 105°]$

53 $\alpha = 60°, \overline{HB} = 9, \cos\beta = \frac{1}{3}.$ $\left[27; 12\sqrt{6}; 3(2\sqrt{6}+3); \text{arcsen}\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}\right]$

54 $\overline{AC} = 24, \beta = \frac{\pi}{3}; \text{tg}\,\alpha = \frac{4}{3}.$ $\left[\frac{64\sqrt{3}}{5}; \frac{8(9+4\sqrt{3})}{5}; \text{arcsen}\frac{3\sqrt{3}+4}{10}\right]$

55 $\overline{CH} = 8, \overline{AH} = 6, \beta = 30°.$ $\left[2(3+4\sqrt{3}); 16; 10; \text{arcsen}\frac{4}{5}; \text{arcsen}\frac{3+4\sqrt{3}}{10}\right]$

56 In un triangolo rettangolo un cateto è lungo 10 cm e l'angolo opposto a esso è di 40°. Trova il perimetro del triangolo. [37,47 cm]

57 In un triangolo rettangolo il rapporto tra un cateto e l'ipotenusa è $\frac{5}{13}$, e l'altro cateto è lungo 48 cm. Determina l'area del triangolo e le misure degli angoli. [480 cm^2; 22° 37'; 67° 23']

58 Nel triangolo ABC, rettangolo in A, un cateto è lungo 20 cm e il coseno dell'angolo acuto a esso adiacente è 0,7. Determina l'area e il perimetro del triangolo. [204 cm^2; 68,97 cm]

59 Nel triangolo rettangolo ABC la lunghezza dell'ipotenusa BC è 41 cm e la tangente dell'angolo $\widehat{B}$ è $\frac{40}{9}$. Determina il perimetro e l'area del triangolo. [90 cm; 180 cm^2]

60 Nel triangolo rettangolo ABC le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa BC sono $BH = 25$ cm e $CH = 49$ cm. Determina i cateti e gli angoli acuti. $\left[AB = 5\sqrt{74}\text{ cm}; AC = 7\sqrt{74}\text{ cm}; \widehat{B} = \text{arctg}\frac{7}{5}; \widehat{C} = \text{arctg}\frac{5}{7}\right]$

61 In un triangolo rettangolo la lunghezza dell'altezza AH relativa all'ipotenusa è 12 cm e l'ampiezza dell'angolo acuto β è 22°. Risolvi il triangolo. $[AB \simeq 32{,}03\text{ cm}; AC \simeq 12{,}94\text{ cm}; BC \simeq 34{,}55\text{ cm}]$

62 Nel triangolo rettangolo ABC l'altezza AH relativa all'ipotenusa misura 3 m, la proiezione HC del cateto AC sull'ipotenusa misura 7 m. Calcola il perimetro e l'area del triangolo. $\left[\left(\frac{10\sqrt{58}}{7} + \frac{58}{7}\right)\text{m}; \frac{87}{7}\text{m}^2\right]$

63 L'area di un triangolo rettangolo è 54 m^2 e la tangente di uno degli angoli acuti misura $\frac{3}{4}$. Calcola il perimetro del triangolo. [36 m]

64 Calcola l'area di un triangolo rettangolo, sapendo che il suo perimetro è 46 m e l'ampiezza di un angolo acuto è 34°. [85,99 m^2]

65 Determina l'area di un rettangolo, sapendo che la sua diagonale è lunga 65 cm e che essa forma con la base un angolo di 20°. [1357,89 cm^2]

66 In un triangolo isoscele gli angoli alla base sono di 50°. Determina l'area, sapendo che la base del triangolo è 40 cm. [476,70 cm^2]

67 Determina i cateti di un triangolo rettangolo, sapendo che l'altezza relativa all'ipotenusa è 50 cm e che uno degli angoli del triangolo è 25°. [55,17 cm; 118,31 cm]

68 In un trapezio isoscele l'angolo alla base, l'altezza e la base maggiore sono rispettivamente 80°, 50 cm e 37,64 cm. Calcola il perimetro del trapezio. [159,18 cm]

69 Calcola l'area di un rombo che ha la diagonale maggiore di 16 cm e un angolo di 120°. $\left[\frac{128\sqrt{3}}{3}\text{cm}^2\right]$

70 Nel trapezio rettangolo $ABCD$ il lato obliquo BC forma un angolo di 30° con la base maggiore AB e la diagonale AC è perpendicolare a BC. Calcola il perimetro e l'area del trapezio, sapendo che la sua altezza è 10 cm.
$\left[10\left(3+\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)\text{cm}; \frac{250\sqrt{3}}{3}\text{ cm}^2\right]$

71 L'area di un trapezio isoscele di base AB è 184 m², il suo perimetro è 64 m e la sua altezza è $h = 8$ m. Determina gli angoli del trapezio.
$\left[\widehat{A}=\widehat{B}=\text{arcsen}\frac{8}{9}; \widehat{C}=\widehat{D}=\pi-\text{arcsen}\frac{8}{9}\right]$

72 Le altezze di un parallelogramma sono 9 m e 12 m e il perimetro 70 m. Determina gli angoli del parallelogramma.
$\left[\text{arcsen}\frac{3}{5}; \pi-\text{arcsen}\frac{3}{5}\right]$

73 In un triangolo rettangolo un cateto è lungo 75 cm e il seno del suo angolo opposto è $\frac{15}{17}$. Determina il perimetro del triangolo e l'altezza relativa all'ipotenusa.
[200 cm; $h \simeq 35{,}29$ cm]

74 In un triangolo rettangolo un cateto è i $\frac{3}{8}$ dell'altro e la loro somma è 44 cm. Risolvi il triangolo.
$\left[32\text{ cm}; 12\text{ cm}; 4\sqrt{73}\text{ cm}; \widehat{B}=\text{arcsen}\frac{3\sqrt{73}}{73}\right]$

75 In un triangolo isoscele la base è lunga 24 cm e il coseno dell'angolo al vertice è $\frac{7}{25}$. Determina le altezze del triangolo.
[16 cm; 19,2 cm]

76 Il lato obliquo di un triangolo isoscele è lungo 81 cm e il coseno dell'angolo alla base è $\frac{9}{41}$. Trova il perimetro e l'area del triangolo.
[197,56 cm; 1404,9756 cm²]

77 Nel trapezio isoscele $ABCD$ di base AB è $AD = DC = 82$ cm e tg $\widehat{A} = \frac{9}{40}$. Determina perimetro e area del trapezio.
[488 cm; 2916 cm²]

78 Trova il perimetro di un triangolo isoscele, di base $\overline{AB} = 48$ cm, in cui il coseno dell'angolo al vertice è uguale a $-\frac{7}{25}$.
[108 cm]

79 In un triangolo ABC, $\widehat{A} = 30°$ e $\widehat{B} = 45°$. Essendo $AC = 20$ cm e $CB = 10\sqrt{2}$ cm, calcola la lunghezza del lato AB.
[$(10\sqrt{3}+10)$ cm]

80 Trova i lati del triangolo ABC in cui cos $\widehat{A} = \frac{4}{5}$, $\widehat{B} = 45°$ e l'altezza relativa ad AB è lunga 24 cm.
[56 cm; 40 cm; $24\sqrt{2}$ cm]

81 Nel triangolo ABC conosci gli angoli $\widehat{A} = 35°$, $\widehat{B} = 70°$ e l'altezza $CH = 30$ cm. Determina i lati del triangolo.
[$AC \simeq 52{,}3$ cm; $BC \simeq 31{,}93$ cm; $AB \simeq 53{,}76$ cm]

82 Una circonferenza ha diametro $\overline{AB} = 60$. La corda AC misura 40 e il suo prolungamento incontra in T la tangente alla circonferenza condotta per il punto B. Calcola $\overline{BT}$.
[$30\sqrt{5}$]

83 In un triangolo rettangolo l'ipotenusa è lunga 20 cm e fra gli angoli acuti β e γ vale la relazione sen β = = 2 sen γ. Trova l'area del triangolo.
[80 cm²]

84 La differenza tra i cateti di un triangolo rettangolo è 2 cm, mentre il coseno di uno degli angoli acuti è $\frac{21}{29}$. Determina il perimetro del triangolo.
[140 cm]

85 In un trapezio rettangolo $ABCD$ l'angolo $D\widehat{C}B$ è di 120° e il lato obliquo BC, che misura $6l$, è perpendicolare alla diagonale minore AC. Determina il perimetro e l'area del trapezio.
$\left[\text{perimetro} = 3(9+\sqrt{3})l; \text{area} = \frac{63\sqrt{3}}{2}l^2\right]$

86 Trova gli angoli di un triangolo isoscele sapendo che il perimetro è 72 cm e la base 32 cm. [36,9°; 106,2°]

87 In un triangolo rettangolo un cateto è i $\frac{7}{24}$ dell'altro e l'area è 756 cm^2. Determina i cateti e gli angoli acuti. [72 cm, 21 cm; 73,7°; 16,3°]

88 In un triangolo rettangolo un cateto è lungo 72 cm ed è i $\frac{12}{13}$ dell'ipotenusa. Risolvi il triangolo. [78 cm; 30 cm; 67,4°; 22,6°]

89 Determina il perimetro e l'area di un ottagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio $r = \sqrt{2+\sqrt{2}}$. $[8\sqrt{2}; 4(\sqrt{2}+1)]$

90 Da un punto P esterno a una circonferenza di centro C si mandano le tangenti PA e PB. Sapendo che $\cos A\widehat{P}B = -\frac{7}{25}$ e che $PC = 15$ cm, determina i valori delle funzioni goniometriche degli angoli $C\widehat{P}A$ e $P\widehat{C}A$ e il raggio della circonferenza. $\left[\text{sen } C\widehat{P}A = \frac{4}{5}; \text{sen } P\widehat{C}A = \frac{3}{5}; r = 12 \text{ cm}\right]$

91 In un triangolo rettangolo la differenza dei cateti è 6 cm e la tangente dell'angolo opposto al cateto maggiore è $\frac{21}{20}$. Calcola il perimetro e l'area del triangolo. [420 cm; 7560 cm^2]

92 Nel triangolo ABC l'altezza CH divide AB in due parti, una tripla dell'altra. Sapendo che $\overline{AB} = 8a$ e $\overline{CH} = 2a$, calcola:
a) la tangente di ciascun angolo del triangolo;
b) il perimetro del triangolo;
c) l'altezza relativa a CB nel triangolo CHB.

$\left[\text{a) tg } \widehat{A} = 1; \text{tg } \widehat{B} = \frac{1}{3}; \text{tg } \widehat{C} = -2; \text{b) } 2a(\sqrt{2}+\sqrt{10}+4); \text{c) } \frac{3a\sqrt{10}}{5}\right]$

93 Il trapezio $ABCD$ è rettangolo in A e D. Sapendo che $AB = 32$ cm, $CD = 8$ cm e $\text{tg } \widehat{B} = \frac{5}{12}$, calcola il perimetro e l'area del trapezio e determina il valore di $\cos \widehat{C}$. $\left[76 \text{ cm}; 200 \text{ cm}^2; -\frac{12}{13}\right]$

94 Determina i lati di un triangolo rettangolo, sapendo che il perimetro è 180 cm e la tangente di uno degli angoli acuti è $\frac{12}{5}$. [30 cm; 72 cm; 78 cm]

95 Gli angoli $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ del triangolo ABC sono acuti e $\text{sen } \widehat{C} = \frac{4}{5}$. Sapendo che la lunghezza del lato AB è 12 cm e quella dell'altezza AH è 8 cm, determina la lunghezza degli altri due lati e il valore di $\text{sen } \widehat{A}$. $\left[AC = 10 \text{ cm}; BC = (4\sqrt{5}+6) \text{ cm}; \text{sen } \widehat{A} = \frac{6+4\sqrt{5}}{15}\right]$

96 Nel triangolo ABC l'angolo $\widehat{B}$ è ottuso e AH è l'altezza relativa al lato BC. Sapendo che $HB = 12$ cm, $HC = 48$ cm e $\text{tg } \widehat{C} = \frac{1}{3}$, determina i lati e gli angoli del triangolo. $\left[AB = 20 \text{ cm}; AC = 16\sqrt{10} \text{ cm}; BC = 36 \text{ cm}; \widehat{B} = \text{arcsen}\frac{4}{5}; \widehat{A} = \text{arcsen}\frac{9}{50}\sqrt{10}\right]$

97 L'ipotenusa di un triangolo rettangolo è lunga 106 cm e il perimetro 252 cm. Determina le tangenti degli angoli acuti. $\left[\frac{28}{45}; \frac{45}{28}\right]$

160 Sia ABC un triangolo inscritto in una circonferenza. Determina la misura del raggio, sapendo che la corda BC misura $12l$ e gli angoli $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ misurano rispettivamente 45° e 105°. Trova poi il perimetro del triangolo.
$\left[r = 12l; 6l(\sqrt{6} + 2 + 3\sqrt{2})\right]$

161 Nel quadrilatero $ABCD$ inscritto in una circonferenza di raggio 4 calcola $\overline{AD}$ e l'ampiezza dei quattro angoli, sapendo che $\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = 4\sqrt{3}$, $\overline{CD} = 4\sqrt{2}$.
$\left[4\sqrt{2}; \widehat{A} = \frac{7}{12}\pi; \widehat{B} = \widehat{D} = \frac{\pi}{2}; \widehat{C} = \frac{5}{12}\pi\right]$

162 Considera una circonferenza di raggio r e una sua corda $\overline{AB} = r$. Sul maggiore dei due archi $\overset{\frown}{AB}$ prendi un punto P e poni $P\widehat{B}A = x$. Determina $\overline{BP}$ in funzione di x e trova per quali valori di x si ha $r < \overline{BP} < r\sqrt{2}$.
$\left[\overline{BP} = 2r \,\text{sen}\left(\frac{5}{6}\pi - x\right); 0 < x < \frac{\pi}{12} \vee \frac{7}{12}\pi < x < \frac{2}{3}\pi\right]$

163 Su una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ considera la corda $\overline{AC} = r$ e sull'arco $\overset{\frown}{CB}$ un punto P variabile, con $P\widehat{A}B = x$. Calcola x in modo che il perimetro di $ACPB$ sia $5r$. Trova poi l'area del quadrilatero corrispondente al valore di x determinato.
$\left[\frac{\pi}{6}; \frac{3}{4}r^2\sqrt{3}\right]$

164 In una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, la corda AC misura $r\sqrt{2}$. Il punto P, preso sull'arco $\overset{\frown}{AC}$, ha proiezione H sul segmento AC e C ha proiezione K sulla tangente in P. Detto x l'angolo $C\widehat{A}P$, determina la funzione

$$y = \overline{CK} + \sqrt{2}\,\overline{PH} + \overline{PK}$$

e rappresenta il suo grafico tenendo conto dei limiti del problema.
$\left[y = 2r \,\text{sen}\, 2x; 0 \le x \le \frac{\pi}{4}\right]$

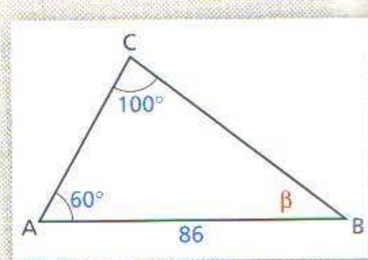
3. I TRIANGOLI QUALUNQUE

Teoria a pag. 727

Il teorema dei seni

165 **ESERCIZIO GUIDA**

Utilizziamo gli elementi indicati nella figura per trovare l'angolo β e i lati CB e AC del triangolo.



$\beta = 180° - (100° + 60°) = 20°.$

Applichiamo il teorema dei seni per determinare CB e AC:

$$\frac{\overline{CB}}{\text{sen}\,60°} = \frac{86}{\text{sen}\,100°} \rightarrow \overline{CB} = \frac{86}{\text{sen}\,100°} \cdot \text{sen}\,60° \simeq 75{,}6.$$

$$\frac{\overline{AC}}{\text{sen}\,20°} = \frac{86}{\text{sen}\,100°} \rightarrow \overline{AC} = \frac{86}{\text{sen}\,100°} \cdot \text{sen}\,20° \simeq 29{,}8.$$

Del triangolo ABC sono noti alcuni elementi. Determina ciò che è richiesto.

166 $a = 12$, $b = 9$, $\beta = 30°$. sen α? $\left[\frac{2}{3}\right]$

167 $a = 20$, $b = 9$, $\alpha = 120°$. sen β? $\left[\frac{9\sqrt{3}}{40}\right]$

168 $a = 21$, $c = 12$, $\gamma = \frac{\pi}{3}$. sen α? cos β? [impossibile]

169 $b = 12$, $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$. a? c? $[6\sqrt{6}; 6(\sqrt{3}+1)]$

170 $a = 12\sqrt{2}$, $\beta = 60°$, $\gamma = 45°$. b? c? $[12\sqrt{3}(\sqrt{3}-1); 12\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)]$

171 $\alpha = 60°$, $\gamma = 75°$, $b = 12$. a? c? $[6\sqrt{6}; 6(1+\sqrt{3})]$

172 $\alpha = 82°$, $\beta = 36°$, $c = 63$. a? b? $[70{,}6; 41{,}9]$

173 $\beta = 28°$, $\gamma = 107°$, $b = 48$. a? c? $[72{,}3; 97{,}8]$

174 Nel triangolo ABC sono noti $\overline{AB} = 20$, $\cot \widehat{A} = \frac{3}{4}$ e $\widehat{C} = \frac{\pi}{6}$. Determina la misura degli altri due lati. $[\overline{BC} = 32; \overline{AC} = 4(3+4\sqrt{3})]$

175 Determina il perimetro del parallelogramma $ABCD$ di base AB, sapendo che $\overline{BD} = 12$, $D\widehat{A}B = \frac{\pi}{3}$, $A\widehat{B}D = \frac{\pi}{4}$. $[12\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)]$

176 Nel triangolo ABC si conoscono $AB = 10\sqrt{7}$ m, sen $\widehat{A} = \frac{3}{5}$ e $\cos \widehat{C} = -\frac{3}{4}$. Determina i lati AC e BC. $[AC = 2(4\sqrt{7}-9)$ m; $BC = 24$ m$]$

177 Nel triangolo LMN il lato LM è lungo 60 cm e l'angolo $M\widehat{L}N$ ha ampiezza 30°. Sapendo che $\cos L\widehat{N}M = \frac{2}{3}\sqrt{2}$, determina gli altri lati del triangolo. $[MN = 90$ cm; $LN = 30(2\sqrt{2}+\sqrt{3})$ cm$]$

178 Nel triangolo acutangolo ABC la mediana AM è lunga 80 cm e forma, col lato AB, un angolo di 30°. La lunghezza del lato BC è 120 cm. Calcola l'area del triangolo. $[800(\sqrt{5}+2\sqrt{3})$ cm$^2]$

179 La bisettrice NP del triangolo LMN misura 40. Determina $\overline{NM}$ e $\overline{LP}$, noti $L\widehat{N}M = \arccos\frac{7}{25}$ e $\widehat{M} = 30°$.

$$\left[\overline{NM} = 8(4+3\sqrt{3});\ \overline{LP} = \frac{1200}{7+24\sqrt{3}}\right]$$

180 Il triangolo LMN è ottusangolo in $\widehat{L}$; sapendo che $LM = 19$ m, $LN = 13$ m e che l'altezza relativa al lato LM è $NH = 12$ m, calcola il perimetro del triangolo e l'ampiezza di $L\widehat{N}M$.

$$\left[(32+12\sqrt{5})\text{ m};\ L\widehat{N}M = \text{arcsen}\,\frac{19\sqrt{5}}{65}\right]$$

181 Nel triangolo ABC i lati AB e BC sono lunghi rispettivamente 50 cm e 80 cm. La tangente di $B\widehat{A}C$ è $-\frac{4}{3}$. Determina il perimetro e l'area.

$[20(5+2\sqrt{3})$ cm; $200(4\sqrt{3}-3)$ cm$^2]$

182 Nel triangolo ABC la bisettrice CD misura 8 e forma con la base AB l'angolo $C\widehat{D}B = 60°$. Determina $D\widehat{C}B$ sapendo che:

$\overline{AC} + \overline{CB} = 24$. $\left[\frac{\pi}{5}\right]$

183 Considera il triangolo equilatero ABC e la circonferenza a esso circoscritta di raggio r. Sull'arco $\overset{\frown}{AB}$ che non contiene C prendi il punto P. Calcola $A\widehat{B}P$ in modo che l'area del quadrilatero $APBC$ sia i $\frac{4}{3}$ dell'area del triangolo equilatero.

$\left[\frac{\pi}{6}\right]$

184 Sia ABC un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza di raggio r. Considera una corda CD interna all'angolo $A\widehat{C}B$ e su CD un punto E tale che $AD \cong DE$. Dopo aver dimostrato che il triangolo ADE è equilatero, esprimi in funzione di $x = A\widehat{C}D$ il perimetro del triangolo AEC.
Determina poi per quale valore di x il perimetro misura $(2+\sqrt{3})r$.

$\left[\text{perimetro} = r(\operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x + \sqrt{3});\ x = \ldots\right]$

185 Sono dati i triangoli ABC e ABD, appartenenti allo stesso semipiano rispetto al segmento AB, tali che l'angolo $A\widehat{C}B$ è la metà dell'angolo $A\widehat{D}B$, $\overline{CB} = 2a$, $\overline{AD} = a$ e $C\widehat{B}D = \frac{\pi}{6}$. Indica con P il punto di intersezione tra AC e BD e, posto $A\widehat{C}B = x$, determina la funzione:

$$f(x) = \frac{\overline{PC} - \overline{PB}}{\overline{PD}}.$$

Calcola poi in quali intervalli di $[0; 2\pi]$ si ha $f(x) \geq 0$.

$\left[f(x) = \frac{2(1-2\operatorname{sen} x)}{\cos x - \sqrt{3}\operatorname{sen} x}, \text{con } 0 \leq x < \frac{\pi}{6}; 0 \leq x < \frac{\pi}{6} \vee \frac{\pi}{6} < x \leq \frac{5}{6}\pi \vee \frac{7}{6}\pi < x \leq 2\pi\right]$

186 Considera il segmento AB e nei due semipiani opposti disegna il triangolo ABC con $C\widehat{B}A = 2x$ e $\overline{CB} = 2a$ e il triangolo ABD con $B\widehat{A}D = x$. I due triangoli sono tali che $C\widehat{B}D = \frac{\pi}{2}$. Indica con P il punto di intersezione dei segmenti CD e AB. Sapendo che $P\widehat{C}B = \frac{\pi}{6}$, determina la misura di AD in funzione di x e calcola per quali valori di x è:

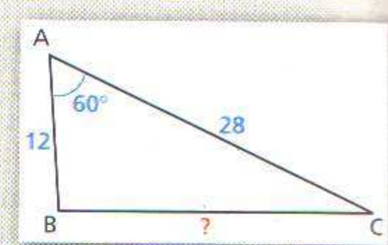
$$\overline{AD} > \frac{2\sqrt{3}}{3}a.$$

$\left[\overline{AD} = \frac{2a\cos 2x}{\sqrt{3}\operatorname{sen} x}; 0 < x < \frac{\pi}{6}\right]$

Il teorema del coseno

187 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo la misura del lato BC utilizzando gli elementi indicati nella figura.



Applichiamo il teorema del coseno: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.
Si ha:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cos B\widehat{A}C =$$
$$= 12^2 + 28^2 - 2\cdot 12\cdot 28\cos 60° =$$
$$= 144 + 784 - \cancel{2}\cdot 12\cdot 28\cdot\frac{1}{\cancel{2}} = 592.$$

Quindi:

$$\overline{BC} = \sqrt{592} \simeq 24{,}3.$$

Del triangolo ABC sono noti alcuni elementi. Determina ciò che è richiesto.

188 $a = 12$, $b = 6$, $\gamma = \frac{\pi}{3}$. c? $[6\sqrt{3}]$

189 $b = 4\sqrt{2}$, $c = 20$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$. a? $[4\sqrt{17}]$

190 $a = 15$, $c = 21$, $\beta = 40°$. b? $[13{,}5]$

191 $a = 24$, $b = 12$, $c = 12\sqrt{3}$. γ? $[60°]$

192 $a = \sqrt{56}$, $b = 10$, $c = 6$. $\cos\alpha$? $\left[\frac{2}{3}\right]$

193 $a = 12$, $b = 4\sqrt{10}$, $c = 8$. $\operatorname{tg}\beta$? $[\sqrt{15}]$

194 $a = 8$, $c = 9$, $\beta = \arccos\frac{1}{3}$. b? $[\sqrt{97}]$

195 $b = 20$, $c = 6$, $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$. a? $[2\sqrt{61}]$

196 Nel triangolo acutangolo ABC si ha sen $A\widehat{C}B = \frac{5}{13}$, $AC = 26$ cm e $BC = 8$ cm. Trova AB.
[$AB = 18,9$ cm]

197 Un rombo ha i lati lunghi 10 cm e un angolo di 25°. Determina le lunghezze delle diagonali.
[4,3 cm; 19,5 cm]

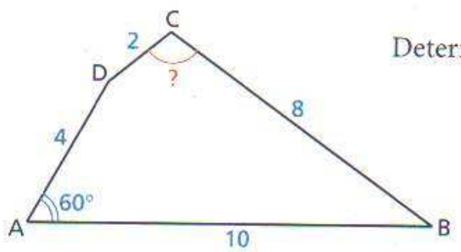
198 Nel triangolo ABC la misura di AC è 4 e il coseno dell'angolo $\widehat{A}$ è $\frac{3}{4}$. Il punto D divide AB nei segmenti $\overline{AD} = 2$ e $\overline{DB} = 1$. Trova $\overline{CD}$, $\overline{CB}$ e la misura di CM, mediana relativa ad AB.
$\left[\overline{CD} = 2\sqrt{2}; \overline{CB} = \sqrt{7}; \overline{CM} = \frac{\sqrt{37}}{2}\right]$

199 In un parallelogramma due lati consecutivi misurano 4 e 20 e l'angolo fra essi compreso è $\alpha = \text{arcsen}\frac{4}{5}$. Calcola le misure dell'area e delle diagonali.
[area $= 64; 8\sqrt{5}; 16\sqrt{2}$]

200 La base maggiore AB del trapezio rettangolo $ABCD$ misura 26, il lato obliquo CB misura 5 e $\widehat{B} = \text{arcsen}\frac{5}{13}$. Determina $\overline{AC}$ e l'area.
$\left[\overline{AC} = \sqrt{461}; \text{area} = \frac{7700}{169}\right]$

201 Verifica che il triangolo che ha i lati lunghi 9 cm, 15 cm e 21 cm è ottusangolo.

202 In un trapezio isoscele $ABCD$ la base maggiore AB e il lato obliquo CB sono lunghi rispettivamente 70 cm e 32 cm. L'angolo $A\widehat{B}C$ è di 72°. Calcola le lunghezze delle diagonali e del perimetro del trapezio.
[$AC = BD = 67,4$ cm; perimetro $= 184,2$ cm]

203 

Determina l'angolo $B\widehat{C}D$ nel quadrilatero della figura.
[$\simeq 104°$]

204 Nel triangolo LMN la lunghezza del lato LM è $6\sqrt{21}$ cm, quella del lato MN è 50 cm e il seno dell'angolo compreso fra essi è $\frac{2}{5}$. Determina il raggio della circonferenza circoscritta e l'area del triangolo.
[$r_1 = 95$ cm, $r_2 = 5\sqrt{46}$ cm; $S_1 = S_2 = 60\sqrt{21}$ cm^2]

205 I lati AB e AC del triangolo ABC sono lunghi rispettivamente 24 cm e 20 cm; il coseno dell'angolo compreso fra essi è $-\frac{1}{4}$. Determina il perimetro, l'area e la mediana BM.
[perimetro $= (44 + 8\sqrt{19})$ cm; area $= 60\sqrt{15}$ cm^2; $BM = 2\sqrt{199}$ cm]

206 Nel triangolo ABC il lato AB supera di 4 cm il lato AC. Inoltre, $B\widehat{A}C = 120°$ e $BC = 14$ cm. Trova le lunghezze dei lati AC e AB.
[$AC = 6$ cm; $AB = 10$ cm]

207 Nel triangolo ABC sono noti il lato AB, la bisettrice AT dell'angolo $B\widehat{A}C$ e il segmento BT staccato da tale bisettrice sul lato BC; le loro lunghezze sono: $AB = 6$ cm, $AT = 6(\sqrt{3} - 1)$ cm e $BT = 3\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$ cm. Calcola il perimetro e l'area del triangolo.
[$(6\sqrt{3} - 3\sqrt{6} + 9\sqrt{2})$ cm; $9(3 - \sqrt{3})$ cm^2]

208 È dato il trapezio isoscele $ABCD$ di cui conosci: la base maggiore $AB = 18$ cm, i lati obliqui $AD = BC = 12$ cm e la diagonale $BD = 6\sqrt{7}$ cm. Determina gli angoli e il perimetro del trapezio.
[$\widehat{A} = 60°$; $\widehat{D} = 120°$; 48 cm]

209 La corda AB di una circonferenza di centro O e raggio r è lunga quanto il lato di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza. Traccia da B la tangente alla circonferenza e prendi su di essa un punto P appartenente al semipiano individuato da AB e contenente O. Poni $\overline{PB} = x$. Esprimi:

$$f(x) = \overline{AP}^2 - \overline{AB}^2,$$

rappresenta la funzione nel piano cartesiano e determina per quale valore di x è $f(x) = \frac{1}{4}r^2$.

$\left[f(x) = x^2 + \sqrt{3}\,rx, x \geq 0; x = \frac{r}{2}(2 - \sqrt{3})\right]$

210 Sia $ABCD$ un quadrato di lato $2r$. Traccia la circonferenza di diametro AB e considera un punto P appartenente alla semicirconferenza interna al quadrato, ponendo $P\widehat{A}B = x$. Sia P' il simmetrico di P rispetto ad AB. Determina la funzione

$$f(x) = \overline{DP'}^2 - \overline{PA}^2,$$

rappresentala graficamente ed evidenzia la parte del grafico relativa al problema. In tale tratto indica il massimo e il minimo valore della funzione. Trova per quale valore di x la funzione assume valore massimo.

$\left[f(x) = 4r^2(1 + \operatorname{sen} 2x); \text{massimo} = 8r^2; \text{minimo} = 4r^2; x = \frac{\pi}{4}\right]$

La risoluzione dei triangoli qualunque

Sono noti un lato e due angoli

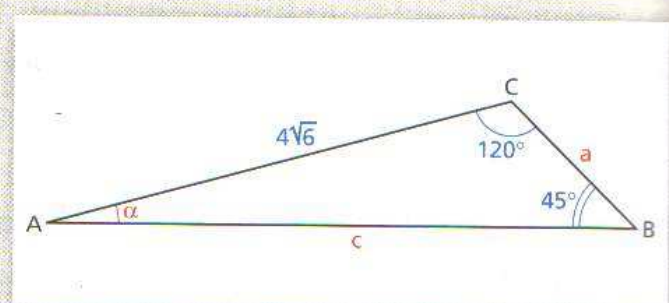
211 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo il triangolo ABC, sapendo che:

$$b = 4\sqrt{6}, \beta = 45°, \gamma = 120°.$$

Ricaviamo α per differenza:

$$\alpha = 180° - (45° + 120°) = 15°.$$



Applichiamo il teorema dei seni per calcolare c e a:

$$\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} \to c = \frac{b \operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\beta};$$

$$c = \frac{4\sqrt{6}\operatorname{sen} 120°}{\operatorname{sen} 45°} = \frac{4\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 12;$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} \to a = \frac{b\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta};$$

$$a = \frac{4\sqrt{6}\operatorname{sen} 15°}{\operatorname{sen} 45°} = \frac{\cancel{4}\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\cancel{4}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\overset{\sqrt{3}}{\cancel{\sqrt{6}}}(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cdot 2}{\cancel{\sqrt{2}}_1} = 6\sqrt{2} - 2\sqrt{6}.$$

Risolvi il triangolo *ABC*, noti gli elementi indicati.

212 $c = 12\sqrt{3}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\gamma = \frac{\pi}{3}$. $\left[\beta = \frac{5}{12}\pi; a = 12\sqrt{2}; b = 6(\sqrt{2} + \sqrt{6})\right]$

213 $b = \sqrt{3} + 1$, $\beta = 15°$, $\gamma = 120°$. $[\alpha = 45°; a = 4 + 2\sqrt{3}; c = 2\sqrt{6} + 3\sqrt{2}]$

214 $a = 8\sqrt{6}$, $\alpha = \frac{2}{3}\pi$, $\beta = \frac{\pi}{12}$. $\left[\gamma = \frac{\pi}{4}; b = 8\sqrt{3} - 8; c = 16\right]$

215 $c = 4\sqrt{2}$, $\alpha = 30°$, $\gamma = \frac{7}{12}\pi$. $\left[\beta = \frac{\pi}{4}; a = 4\sqrt{3} - 4; b = 4\sqrt{6} - 4\sqrt{2}\right]$

216 $a = 28$, $\alpha = 30°$, $\beta = \arccos\frac{1}{3}$. $\left[\gamma \simeq 79°28'; b = \frac{112}{3}\sqrt{2}; c = \frac{28}{3}(2\sqrt{6} + 1)\right]$

217 $c = 4\sqrt{3}$, $\alpha = \frac{2}{3}\pi$, $\beta = \frac{\pi}{12}$. $\left[\gamma = \frac{\pi}{4}; a = 6\sqrt{2}; b = 2\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)\right]$

218 $a = 10\sqrt{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\gamma = \frac{5}{12}\pi$. $\left[\beta = \frac{\pi}{3}; b = 10\sqrt{3}; c = 5\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)\right]$

Sono noti due lati e l'angolo fra essi compreso

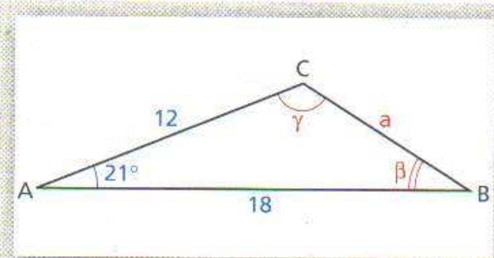
219 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo il triangolo *ABC*, sapendo che:

$b = 12, c = 18, \alpha = 21°$.

Applicando il teorema del coseno, ricaviamo a:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha;$$
$$a^2 = 12^2 + 18^2 - 2 \cdot 12 \cdot 18\cos 21° \simeq 64{,}69;$$
$$a \simeq 8{,}04.$$



Ricaviamo β, applicando ancora il teorema del coseno:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \to \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac};$$
$$\cos\beta \simeq \frac{8{,}04^2 + 18^2 - 12^2}{2 \cdot 8{,}04 \cdot 18} \simeq 0{,}85 \to \beta \simeq 32°.$$

Ricaviamo γ per differenza:

$$\gamma \simeq 180° - (21° + 32°) = 127°.$$

Risolvi il triangolo *ABC*, noti gli elementi indicati.

220 $b = 14$, $c = 28$, $\alpha = 34°$. $[a \simeq 18{,}17; \beta \simeq 26°; \gamma \simeq 120°]$

221 $a = 15{,}3$, $b = 6{,}2$, $\gamma = 128°$. $[c \simeq 19{,}73; \alpha \simeq 38°; \beta \simeq 14°]$

222 $a = \sqrt{3}$, $c = 5\sqrt{3}$, $\beta = 60°$. $[b \simeq 7{,}94; \alpha \simeq 11°; \gamma \simeq 109°]$

223 $b = 4$, $c = 20$, $\alpha = \frac{2}{3}\pi$. $[a \simeq 22{,}27; \beta \simeq 9°; \gamma \simeq 51°]$

224 $a = 4\sqrt{3}$, $b = 6\sqrt{2}$, $\gamma = 60°$. $[\alpha \simeq 50°; \beta \simeq 70°; c \simeq 7{,}8$

Sono noti due lati e l'angolo opposto a uno di essi

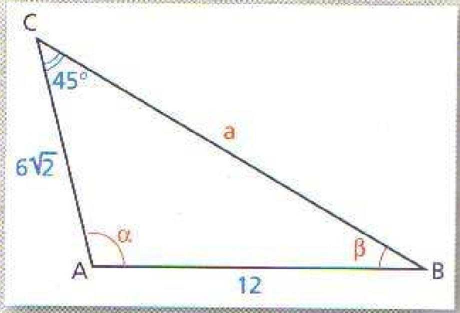
225 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo un triangolo *ABC*, sapendo che:

a) $b = 6\sqrt{2}, c = 12, \gamma = 45°$;

b) $b = 4\sqrt{2}, c = 4\sqrt{6}, \beta = 30°$.

a) Ricaviamo β con il teorema dei seni:



$$\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta},$$

$$\frac{\cancel{12}^{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{{}^{1}\cancel{6}\sqrt{2}}{\operatorname{sen}\beta} \rightarrow \operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2} \begin{cases} \beta_1 = 30° \\ \beta_2 = 150° \end{cases}$$

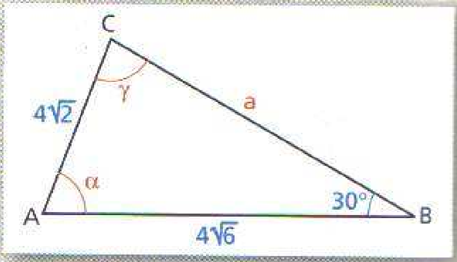
È accettabile solo il valore $\beta_1 = 30°$, in quanto per $\beta_2 = 150°$ si avrebbe $\beta + \gamma = 150° + 45° = 195° > 180°$.
Inoltre non sarebbe vero che ad angolo maggiore sta opposto lato maggiore: $6\sqrt{2}$, che è minore di 12, sarebbe opposto a 150°, che è maggiore di 45°.
Determiniamo α per differenza:

$$\alpha = 180° - (30° + 45°) = 105°.$$

Troviamo a con il teorema dei seni:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} \rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen}105°} = \frac{6\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} \rightarrow a \simeq 16{,}4.$$

b) Applichiamo il teorema dei seni:



$$\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta},$$

$$\frac{4\sqrt{6}}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{4\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} \rightarrow \operatorname{sen}\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{cases} \gamma_1 = 60° \\ \gamma_2 = 120° \end{cases}$$

Entrambe le soluzioni sono accettabili.

- Se $\gamma = 60° \rightarrow \alpha = 90°$,

$$\frac{a}{\operatorname{sen}90°} = \frac{4\sqrt{2}}{\operatorname{sen}30°} \rightarrow a = 8\sqrt{2}.$$

- Se $\gamma = 120° \rightarrow \alpha = 30°$, il triangolo è isoscele, quindi $a = 4\sqrt{2}$.

Risolvi il triangolo *ABC*, noti gli elementi indicati.

226 $a = 12\sqrt{2}$, $b = 8\sqrt{3}$, $\alpha = 60°$. $[\beta = 45°; \gamma = 75°; c = 12 + 4\sqrt{3}]$

227 $b = 6\sqrt{3}$, $c = 6\sqrt{2}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$. $\left[\alpha = \frac{5}{12}\pi; \gamma = \frac{\pi}{4}; a = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{6}\right]$

228 $a = 2\sqrt{2}$, $c = \sqrt{2} + \sqrt{6}$, $\alpha = 45°$. $[\beta = 60°, \gamma = 75°, b = 2\sqrt{3} \ \vee \ \beta = 30°, \gamma = 105°, b = 2]$

229 $b = 7$, $c = 7\sqrt{3}$, $\gamma = 120°$. $[\alpha = 30°; \beta = 30°; a = 7]$

230 $b = 3\sqrt{3}$, $c = 3$, $\beta = \frac{\pi}{3}$. $\left[\alpha = \frac{\pi}{2}; \gamma = \frac{\pi}{6}; a = 6\right]$

231 $b = 4$, $c = 2\sqrt{2}$, $\gamma = \frac{\pi}{6}$.
$\left[\alpha = \frac{7}{12}\pi, \beta = \frac{\pi}{4}, a = 2(\sqrt{3}+1) \vee \alpha = \frac{\pi}{12}, \beta = \frac{3}{4}\pi, a = 2(\sqrt{3}-1)\right]$

232 $a = 6(\sqrt{2}+1)$, $b = 6 + 3\sqrt{2}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$. $\left[\alpha = \frac{\pi}{2}; \gamma = \frac{\pi}{4}; c = 6 + 3\sqrt{2}\right]$

233 $a = 3\sqrt{5}$, $b = 3$, $\cos\alpha = \frac{1}{4}$. $[\beta \simeq 26°; \gamma \simeq 79°; c \simeq 6{,}80]$

234 $a = 2\sqrt{3}$, $b = 3\sqrt{3}$, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{3}$ (α acuto). $[\beta = 90°; \gamma \simeq 48°; c = \sqrt{15}]$

Sono noti i tre lati

235 **ESERCIZIO GUIDA**

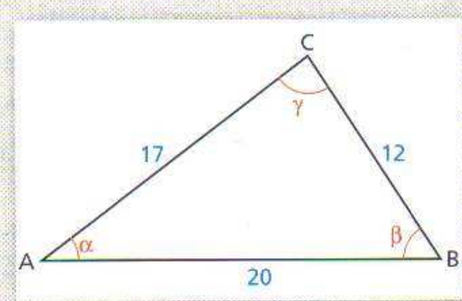
Risolviamo un triangolo ABC, sapendo che:
$a = 12, b = 17, c = 20$.

Applichiamo più volte il teorema del coseno:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{17^2 + 20^2 - 12^2}{2 \cdot 17 \cdot 20} \simeq 0{,}80 \to \alpha \simeq 36{,}72°;$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{12^2 + 20^2 - 17^2}{2 \cdot 12 \cdot 20} \simeq 0{,}53 \to \beta \simeq 57{,}91°;$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{12^2 + 17^2 - 20^2}{2 \cdot 12 \cdot 17} \simeq 0{,}08 \to \gamma \simeq 85{,}36°.$$



Risolvi il triangolo ABC, noti gli elementi indicati.

236 $a = 4$, $b = 9$, $c = 12$. $[\alpha \simeq 15°; \beta \simeq 35°; \gamma \simeq 130°]$

237 $a = 20$, $b = 7$, $c = 14$. $[\alpha \simeq 142°; \beta \simeq 12°; \gamma \simeq 26°]$

238 $a = 52$, $b = 48$, $c = 36$. $[\alpha \simeq 75°; \beta \simeq 63°; \gamma \simeq 42°]$

239 $a = 15$, $b = 26$, $c = 40$. $[\alpha \simeq 10°; \beta \simeq 17°; \gamma \simeq 153°]$

240 $a = 4$, $b = 2\sqrt{6}$, $c = 2 + 2\sqrt{3}$. $[45°; 60°; 75°]$

241 $a = 12$, $b = 8$, $c = 4\sqrt{7}$. $[\alpha \simeq 79°; \beta \simeq 41°; \gamma \simeq 60°]$

242 $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{2}$, $c = \sqrt{2} + \sqrt{6}$. $\left[\alpha = \frac{\pi}{3}; \beta = \frac{\pi}{4}; \gamma = \frac{5}{12}\pi\right]$

I problemi con i triangoli qualunque

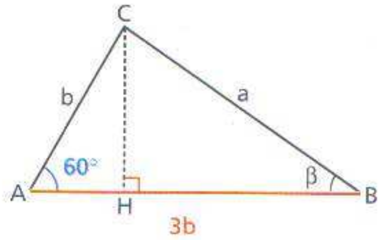
243 **VERO O FALSO?**

Nel triangolo della figura si ha:

a) $a = \dfrac{\sqrt{3}\,b}{2\,\text{sen}\,\beta}$. V F

b) $\overline{CH} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. V F

c) $\dfrac{\text{sen}\,(120° - \beta)}{\text{sen}\,\beta} = 3$. V F



244 In un triangolo un lato misura $9\sqrt{2}$. Un angolo a esso adiacente è di $\frac{\pi}{4}$ e l'altro ha tangente uguale a $-\frac{4}{3}$. Determina le misure degli altri elementi del triangolo. $\left[\text{angolo: arccos}\,\frac{\sqrt{98}}{10}\text{; lati: 72, }45\sqrt{2}\right]$

245 In un triangolo l'area misura $\frac{\sqrt{3}}{2}(1 + \sqrt{3})$ e due angoli hanno ampiezze $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{3}$. Calcola le misure degli altri elementi del triangolo.

$\left[\text{angolo: }\frac{5}{12}\pi\text{; lati: 2, }\sqrt{6}, \sqrt{3} + 1\right]$

246 In un triangolo le misure dell'area e di due lati sono rispettivamente $\frac{25}{2}(3 - \sqrt{3})$, 10 e $5(\sqrt{3} - 1)$. Trova gli altri elementi del triangolo.

[60°, 81°, 39°, 8,76 ∨ 120°, 45°, 15°, $5\sqrt{6}$]

247 In un triangolo isoscele il seno degli angoli alla base è uguale a $\frac{1}{5}$. Calcola il perimetro e l'area sapendo che la base misura 40.

$\left[10\left(\frac{5}{3}\sqrt{6} + 4\right), \frac{100}{3}\sqrt{6}\right]$

248 Calcola l'area di un rombo di lato 35 cm, sapendo che il coseno dell'angolo acuto è $\frac{7}{25}$. [1176 cm^2]

249 Determina il perimetro e la diagonale minore di un parallelogramma, sapendo che la diagonale maggiore è lunga 20 cm e forma con un lato un angolo di 30°, mentre l'angolo a essa opposto è di 135°.

[$20(\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1)$ cm, $20\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ cm]

250 Calcola il perimetro e l'area di un trapezio isoscele, sapendo che la base maggiore è 90 cm, il lato obliquo 30 cm e l'angolo alla base ha il coseno uguale a $\frac{3}{5}$. [204 cm; 1728 cm^2]

251 In un parallelogramma la diagonale minore misura $2\sqrt{2}$ cm e forma con un lato un angolo di 30°. Sapendo che l'angolo opposto a tale diagonale è di 45°, calcola il perimetro del parallelogramma.

[$2(\sqrt{6} + \sqrt{2} + 2)$ cm]

252 Nel parallelogramma $ABCD$ si hanno: $AD = 5$ cm, $AB = 1$ cm, $\widehat{A} = 135°$. Determina le diagonali del parallelogramma. [5,75 cm; 4,35 cm]

253 In un parallelogramma un angolo misura 75°, un lato 15 e l'area $15\sqrt{3}$. Calcola la misura dell'altro lato.

[$3\sqrt{2} - \sqrt{6}$]

254 Il triangolo acutangolo ABC è inscritto in una circonferenza di raggio 5; la misura del lato AB è $5\sqrt{3}$ e quella del lato AC è 8. Calcola l'area del triangolo. [$2(4\sqrt{3} + 9)$]

255 Nel quadrato $ABCD$ è inscritto il quadrato $RSTV$ ($AR \cong BS \cong CT \cong DV$). Il perimetro di $ABCD$ è $8\sqrt{6}$, quello di $RSTV$ è 16. Determina gli angoli $S\widehat{R}B$ e $R\widehat{S}B$. [15°; 75°]

256 Sulla semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ è assegnato un punto Q tale che $\overline{AQ} + \overline{QB} = \sqrt{6}\,r$. Quanto misura l'angolo $Q\widehat{A}B$? [due soluzioni simmetriche: 15°; 75°]

257 Nella semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 4$ è data la corda $\overline{BC} = 2$. Sul raggio OA è fissato il punto D tale che $\overline{DO} = 3\overline{AD}$. Calcola la misura del segmento DC. $\left[\frac{\sqrt{37}}{2}\right]$

258 L'ampiezza dell'angolo al vertice di un triangolo isoscele è 120°. Calcola il rapporto fra il raggio della circonferenza circoscritta e il raggio di quella inscritta. $\left[\frac{2(2\sqrt{3}+3)}{3}\right]$

259 Un triangolo ABC è inscritto in una circonferenza; le misure dei lati AC e BC sono rispettivamente 5 e 3 e l'area è 6. Determina il raggio della circonferenza circoscritta. $\left[\text{due soluzioni: } \frac{5}{2}; \frac{5}{4}\sqrt{13}\right]$

260 In un triangolo isoscele il rapporto $\frac{r_i}{r_c}$ fra i raggi della circonferenza inscritta e circoscritta è $\frac{1}{2}$: determina gli angoli del triangolo. [triangolo equilatero]

261 Il triangolo acutangolo MNP è inscritto in una circonferenza di raggio 2; la misura del lato MN è $2\sqrt{3}$ e l'area della superficie è $(3+\sqrt{3})$. Determina gli angoli del triangolo. [due sol. 60°, 75°, 45°; 60°, 45°, 75°]

262 Il triangolo RST ha il lato RS lungo 8 cm e la mediana RM lunga 5 cm. Sapendo che l'ampiezza dell'angolo $S\widehat{R}M$ è $\arccos\frac{3}{5}$, determina i lati RT e ST e l'angolo $R\widehat{S}T$. $\left[RT = 2\sqrt{17}\text{ cm}; ST = 2\sqrt{41}\text{ cm}; \text{arcsen}\frac{4}{\sqrt{41}}\right]$

263 Sai che nel triangolo ABC il lato BC è lungo 110 cm, la mediana AM è lunga 80 cm e l'angolo $A\widehat{M}C$ è di 60°. Determina l'area e il perimetro del triangolo. $[2200\sqrt{3}\text{ cm}^2; (110 + 5\sqrt{553} + 5\sqrt{201})\text{ cm}]$

264 Nel triangolo PQR conosci il lato $\overline{PQ} = 2\sqrt{2}$, il lato $\overline{QR} = 2$ e la mediana $\overline{RM} = \sqrt{3} - 1$. Calcola l'area e il perimetro del triangolo. $[\text{area} = \sqrt{3} - 1; \text{perimetro} = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{6}]$

265 La base maggiore del trapezio rettangolo $ABCD$ è $AB = 48$ cm; la diagonale maggiore BD è lunga $32\sqrt{3}$ cm ed è bisettrice dell'angolo $A\widehat{B}C$. Determina gli angoli, il perimetro e l'area del trapezio. $[\widehat{B} = 60°; \widehat{C} = 120°; 16(7+\sqrt{3})\text{ cm}; 640\sqrt{3}\text{ cm}^2]$

266 Nel triangolo ABC sono dati il lato $AB = 35$ cm, il lato $AC = 21$ cm e $\text{tg}\,\widehat{B} = \frac{3}{4}$. Determina gli elementi incogniti del triangolo. $\left[\widehat{C} = 90°; \widehat{B} = \text{arcsen}\frac{3}{5}; \widehat{A} = \frac{\pi}{2} - \widehat{B}; BC = 28\text{ cm}\right]$

267 Il rettangolo $ABCD$ ha i lati $AB = 40$ cm e $BC = 25$ cm; il parallelogramma $ABC'D'$ ha i vertici C' e D' appartenenti alla retta CD. Il perimetro di $ABC'D'$ è i $\frac{6}{5}$ del perimetro di $ABCD$. Calcola gli angoli del parallelogramma $ABC'D'$. $\left[\widehat{C'} = \text{arcsen}\frac{25}{38}\right]$

268 Le misure dei lati del trapezio scaleno $ABCD$ sono: base maggiore $\overline{AB} = 60$, base minore $\overline{CD} = 20$, lati obliqui $\overline{BC} = 20\sqrt{3}$ e $\overline{AD} = 20$. Determina gli angoli del trapezio, la sua area e la misura delle sue diagonali. $[\widehat{A} = 60°, \widehat{B} = 30°, \widehat{C} = 150°, \widehat{D} = 120°; 400\sqrt{3}; 20\sqrt{7}, 20\sqrt{3}]$

269 In un rombo di lato l è inscritta una circonferenza; in tale circonferenza è inscritto il rettangolo che ha i vertici nei punti di tangenza fra rombo e circonferenza. Sapendo che l'ampiezza degli angoli acuti è α, trova l'area del rettangolo.

$$\left[\frac{1}{2} l^2 \operatorname{sen}^3 \alpha\right]$$

270 L'area di un triangolo isoscele è 160 m^2; l'altezza relativa alla base è $AH = 20$ m. Determina gli angoli del triangolo e le altezze relative ai lati obliqui.

$$\left[\beta = \gamma = \operatorname{arctg}\frac{5}{2};\ \alpha = \operatorname{arctg}\frac{20}{21};\ h = \frac{80\sqrt{29}}{29}\ \text{m}\right]$$

271 Nel triangolo ABC la lunghezza del lato AB è $5\sqrt{21}$ cm, quella della proiezione del lato AC su BC è 8 cm. Gli angoli $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ sono acuti e $\operatorname{sen}\widehat{C} = \frac{\sqrt{21}}{5}$; calcola i lati e gli angoli del triangolo.

$$\left[AC = 20\ \text{cm};\ BC = (3\sqrt{21} + 8)\ \text{cm};\ \widehat{B} = \arccos\frac{3}{5};\ \widehat{A} = \operatorname{arcsen}\frac{8 + 3\sqrt{21}}{25}\right]$$

272 Il triangolo ABC è ottusangolo in $\widehat{A}$; le lunghezze dei lati AC e BC e dell'altezza CH sono: $AC = 9$ cm, $BC = 24$ cm, $CH = 6$ cm. Determina gli angoli e il terzo lato del triangolo.

$$\left[\widehat{A} = \arccos\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right);\ \widehat{B} = \arccos\frac{\sqrt{15}}{4};\ \widehat{C} = \arccos\frac{2 + 5\sqrt{3}}{12};\ AB = (6\sqrt{15} - 3\sqrt{5})\ \text{cm}\right]$$

273 Nel triangolo ABC la lunghezza della proiezione HC del lato AC su BC è 40 cm; sai inoltre che $\cos\widehat{C} = \frac{4}{7}$, $\operatorname{sen} B\widehat{A}H = \frac{2}{7}$ e l'angolo $\widehat{B}$ è acuto. Calcola le lunghezze dei lati del triangolo e le ampiezze degli altri due angoli.

$$\left[AB = \frac{14}{3}\sqrt{165}\ \text{cm};\ AC = 70\ \text{cm};\ BC = \left(\frac{4}{3}\sqrt{165} + 40\right)\text{cm};\ \widehat{B} = \arccos\frac{2}{7};\ \widehat{A} = \arccos\frac{3\sqrt{165} - 8}{49}\right]$$

274 Determina gli angoli, il raggio della circonferenza inscritta e di quella circoscritta al triangolo ABC, sapendo che $AB = 2$ cm, $BC = \sqrt{6}$ cm e $AC = (1 + \sqrt{3})$ cm.

$$\left[\widehat{A} = 60°,\ \widehat{B} = 75°,\ \widehat{C} = 45°;\ r_i = \frac{1 + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}\ \text{cm};\ r_c = \sqrt{2}\ \text{cm}\right]$$

275 Nel triangolo PQR sono noti il lato $PQ = 2(\sqrt{3} + 1)$ m, la bisettrice $PT = 2$ m e l'angolo $P\widehat{Q}R = 15°$. Determina il perimetro e l'area del triangolo. $[2\sqrt{3}(\sqrt{2} + 2)\ \text{m};\ 2\sqrt{3}\ \text{m}^2]$

276 Nel triangolo ABC la bisettrice di $\widehat{C}$ interseca AB in P. Sapendo che $\overline{PB} = 21$, $\widehat{B} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{4}$ e $A\widehat{C}B = \arccos\frac{7}{9}$, calcola l'area del triangolo.

$$\left[\frac{3136}{23}\sqrt{2}\right]$$

277 Il triangolo ABC ha $\widehat{B} = 45°$ e $\overline{AB} = 28\sqrt{2}$. La mediana AM misura 35. Calcola l'area. [196 o 1372]

278 Nel triangolo ABC l'angolo $\widehat{B}$ è ottuso e AH è l'altezza relativa al lato BC. Sapendo che $HB = 12$ cm, $HC = 48$ cm e $\operatorname{tg} B\widehat{C}A = \frac{1}{3}$, determina i lati e gli angoli del triangolo.

$$\left[AB = 20\ \text{cm};\ AC = 16\sqrt{10}\ \text{cm};\ BC = 36\ \text{cm};\ \operatorname{sen} A\widehat{B}C = \frac{4}{5};\ \operatorname{sen} B\widehat{A}C = \frac{9}{50}\sqrt{10}\right]$$

279 Il triangolo PQR ha l'angolo in Q di 30° e la lunghezza del lato PQ è 120 cm. La mediana RM incontra PQ in M in modo che $R\widehat{M}Q = 110°$. Trova i lati e gli angoli incogniti.

[una soluzione accettabile: $QR \simeq 87{,}71$ cm; $PR \simeq 62{,}15$ cm; $P\widehat{R}Q \simeq 105°$]